

Des carquois et des systèmes intégrables

Maxime Fairon

School of Mathematics and Statistics
University of Glasgow

Université d'Angers
En ligne, 23/03/2021



University
of Glasgow

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Systèmes intégrables à partir de carquois
- 3 Structures de Poisson sur les carquois
- 4 Vers les carquois colorés ?

Espace de Calogero-Moser (1)

$$\mathcal{M} := \{X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), V \in \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{C}), W \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{C})\}$$

$$\text{Action de } \text{GL}_n, g \cdot (X, Y, V, W) = (gXg^{-1}, gYg^{-1}, Vg^{-1}, gW)$$

$$\text{Espace de Calogero-Moser } \mathcal{C}_n := \{[X, Y] - WV = \text{Id}_n\} // \text{GL}_n \quad [\text{Wilson, '98}]$$

Caractérisation sur un ouvert dense :

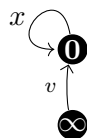
$$X = \text{diag}(q_1, \dots, q_n), \quad V = (1, \dots, 1)$$

$$\text{d'où } W = \quad Y_{ij} =$$

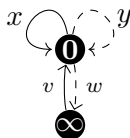
Hamiltonien de Calogero-Moser

$$\frac{1}{2} \text{tr } Y^2 = \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 - \sum_{i \neq j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}$$

Espace de Calogero-Moser (2)



carquois Q_1
 \rightsquigarrow
 et double \bar{Q}_1



Algèbre des chemins $\mathbb{C}\bar{Q}_1$:

$$\text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_1, (1, n)) = \{X, Y \in \mathfrak{gl}_n, V \in \text{Mat}_{1 \times n}, W \in \text{Mat}_{n \times 1}\} = \mathcal{M}$$

\rightsquigarrow L'espace de Calogero-Moser \mathcal{C}_n est une *variété carquois* obtenue par réduction à partir de l'espace des représentations d'un carquois

La structure de Poisson peut se comprendre sur \bar{Q}_1 !

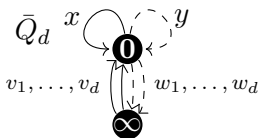
C'est aussi le cas pour l'application de moment $[X, Y] - WV$ (voir partie 3)

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 **Systèmes intégrables à partir de carquois**
- 3 Structures de Poisson sur les carquois
- 4 Vers les carquois colorés ?

Espace de Calogero-Moser avec spin (1)

[Wilson, '98 ; Bielawski-Pidstrygach, '10 ; Tacchella, '15 ; Chalykh-Silantyev, '17]



$$d \geq 2. \mathcal{M} = \text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_d, (1, n))$$

espace paramétré par :

$$X, Y \in \mathfrak{gl}_n$$

$$V_\alpha \in \text{Mat}_{1 \times n}, W_\alpha \in \text{Mat}_{n \times 1}$$

$$\mathcal{C}_{n,d} := \left\{ [X, Y] - \sum_{1 \leq \alpha \leq d} W_\alpha V_\alpha = \lambda_0 \text{Id}_n \right\} // \text{GL}_n \quad (\lambda_0 \neq 0)$$

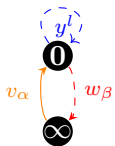
Espace de Calogero-Moser avec d spins/degrés de liberté [Gibbons-Hermsen, '84]

sur un ouvert dense : Y est la matrice de Lax du système CM à spin

Crochet de Poisson non-nul seulement entre une flèche et son double

Espace de Calogero-Moser avec spin (2)

On peut calculer sur $\mathcal{C}_{n,d}$ les crochets de Poisson de $\text{tr } Y^k$ et $t_{\alpha\beta}^l = V_\alpha Y^l W_\beta$.



$$\{\text{tr } Y^k, \text{tr } Y^l\}_{\text{P}} = 0 = \{\text{tr } Y^k, t_{\alpha\beta}^l\}_{\text{P}}$$

$$\{t_{\alpha\beta}^k, t_{\gamma\epsilon}^l\}_{\text{P}} = \delta_{\beta\gamma} t_{\alpha\epsilon}^{k+l} - \delta_{\alpha\epsilon} t_{\gamma\beta}^{k+l}$$

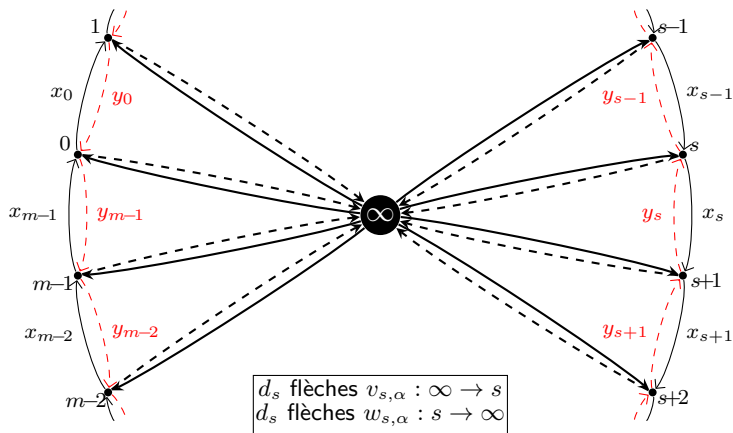
Proposition

L'algèbre commutative générée par les éléments $(\text{tr } Y^k, t_{\alpha\alpha}^k)$, $1 \leq \alpha \leq d$, est Poisson commutative de dimension nd .

On a intégrabilité au sens de Liouville des $\text{tr } Y^k$.

Espaces de CM et carquois cycliques (1)

Les carquois cycliques donnent des systèmes CM [Chalykh-Silantyev, '17]
 extension arbitraire dans [F.-Görbe, '21 / 2101.05520]



On s'intéresse à $\text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_d, (1, n, \dots, n))$

Espaces de CM et carquois cycliques (2)

$\mathcal{M} = \text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_d, (1, n, \dots, n))$ paramétré par

$$X_s \in \mathfrak{gl}_n, \quad Y_s \in \mathfrak{gl}_n, \quad V_{s,\alpha} \in \text{Mat}_{1 \times n}, \quad W_{s,\alpha} \in \text{Mat}_{n \times 1}, \\ s = 0, \dots, m-1, \quad (s, \alpha) \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq d_s$$

Action de $g = (g_s) \in \prod_s \text{GL}_n$:

$$g \cdot (X_s, Y_s, W_{s,\alpha}, V_{s,\alpha}) = (g_s X_s g_{s+1}^{-1}, g_{s+1} Y_s g_s^{-1}, g_s W_{s,\alpha}, V_{s,\alpha} g_s^{-1}),$$

Espace de Calogero-Moser $\mathcal{C}_{n,d}$: $(\prod_s \text{GL}_n)$ -orbites de $[(\lambda_s) \in \mathbb{C}^m \text{ générique}]$

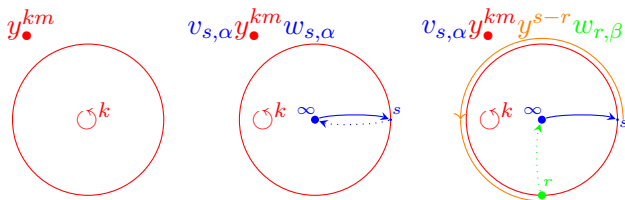
$$X_s Y_s - Y_{s-1} X_{s-1} - \sum_{1 \leq \alpha \leq d_s} W_{s,\alpha} V_{s,\alpha} = \lambda_s \text{Id}_{n_s}, \quad \forall s$$

Sur ouvert dense : $\text{tr}(Y_{\bullet}^{km})$ sont une généralisation du système CM

$$\rightsquigarrow \frac{1}{m} \text{tr}(Y_{\bullet}^{km}) = \sum_{i=1}^n p_i^{mk} + O(p_i^{mk-1})$$

Espaces de CM et carquois cycliques (3)

En adaptant [Chalykh-Silantyev,'17], on peut “visualiser” les éléments qui permettent d’obtenir l’intégrabilité (Liouville) de ces généralisations du système CM :



Proposition ([F.-Görbe,'21])

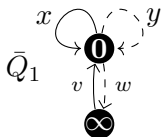
- Chaque fonction $\text{tr} Y^{km}$ est *superintégrable (de manière maximale)*
- *superintégrabilité de $\text{tr}(Y^2 + \omega^2 X^2)$ avec terme harmonique ($m = 1, 2$)*

Jusqu'à présent : cas additif \rightsquigarrow variétés carquois

Autre possibilité : cas multiplicatif \rightsquigarrow variétés carquois multiplicatives

[Crawley–Boevey–Shaw, '06 ; Van den Bergh, '08 ; Yamakawa, '08]

Espace de Ruijsenaars-Schneider (1)



Algèbre des chemins $\mathbb{C}\bar{Q}_1 \rightsquigarrow$ localisation A_1

ajout d'inverses pour $1 + xy, 1 + yx, 1 + vw, 1 + wv$

e.g. $(1 + xy)^{-1} \in A_1,$

$$(1 + xy)(1 + xy)^{-1} = 1 = (1 + xy)^{-1}(1 + xy)$$

$$\text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_1, (1, n)) = \{X, Y \in \mathfrak{gl}_n, V \in \text{Mat}_{1 \times n}, W \in \text{Mat}_{n \times 1}\} = \mathcal{M}$$

\cup

$$\text{Rep}(A_1, (1, n)) = \{\det(\text{Id}_n + XY) \neq 0, 1 + VW \neq 0\} =: \mathcal{M}^\circ$$

Même action de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$

Cette fois, l'action préserve

- un *crochet de quasi-Poisson* sur \mathcal{M}° ;
- une application de moment à valeur dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Espace de Ruijsenaars-Schneider (2)

$$\text{Rep}(\mathbb{C}\bar{Q}_1, (1, n)) = \{X, Y \in \mathfrak{gl}_n, V \in \text{Mat}_{1 \times n}, W \in \text{Mat}_{n \times 1}\} = \mathcal{M}$$

$$\text{Rep}(A_1, (1, n)) = \{\det(\text{Id}_n + XY) \neq 0, 1 + VW \neq 0\} =: \mathcal{M}^\circ$$

Espace de Ruijsenaars-Schneider : [Chalykh-F., '17 /1704.05814] (aussi [Oblomkov, '04])

$$\mathcal{C}_{n,q,1} := \{(\text{Id}_n + XY)(\text{Id}_n + YX)^{-1}(\text{Id}_n + WV)^{-1} = q \text{Id}_n\} // \text{GL}_n \quad (q^k \neq 1)$$

Caractérisation sur un ouvert dense :

$$X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n), \quad V = (1, \dots, 1)$$

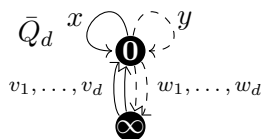
$$\text{d'où } (Y + X^{-1})_{ij} = \frac{(1-q)x_j}{x_i - qx_j} \sigma_j \prod_{k \neq j} \frac{x_k - qx_j}{x_k - x_j}$$

Hamiltonien de Ruijsenaars-Schneider ($x_i = e^{q_i}, \sigma_i = e^{p_i}$)

$$\text{tr}(Y + X^{-1}) = \sum_{1 \leq j \leq n} \sigma_j \prod_{k \neq j} \frac{x_k - qx_j}{x_k - x_j}$$

Espace de Ruijsenaars-Schneider avec spin (1)

Cas $d \geq 2$ avec spin [Chalykh-F., '20 / 1811.08727]



A_d localisation de $\mathbb{C}\bar{Q}_d$

$\mathcal{M}^\circ = \text{Rep}(A_d, (1, n))$

paramétré par : $X, Y \in \mathfrak{gl}_n$

$V_\alpha \in \text{Mat}_{1 \times n}, W_\alpha \in \text{Mat}_{n \times 1}$

$$\mathcal{C}_{n,q,d} := \left\{ (\text{Id}_n + XY)(\text{Id}_n + YX)^{-1} \prod_{1 \leq \alpha \leq d}^{\rightarrow} (\text{Id}_n + W_\alpha V_\alpha)^{-1} = q \text{Id}_n \right\} // \text{GL}_n$$

Espace de Ruijsenaars-Schneider avec d spins/degrés de liberté

Espace de Ruijsenaars-Schneider avec spin (2)

$$\mathcal{C}_{n,q,d} := \left\{ (\text{Id}_n + XY)(\text{Id}_n + YX)^{-1} \prod_{1 \leq \alpha \leq d}^{\rightarrow} (\text{Id}_n + W_\alpha V_\alpha)^{-1} = q \text{Id}_n \right\} // \text{GL}_n$$

Fixons $Z := Y + X^{-1}$

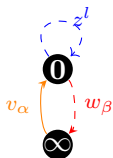
Proposition ([Chalykh-F., '20])

Sur un ouvert de $\mathcal{C}_{n,q,d}$, il existe des coordonnées locales telles que

- *les équations du mouvement associées à l'Hamiltonien $\text{tr}(Z)$ reproduisent les équations du système RS trig. avec spin de [Krichever-Zabrodin, '95];*
- *la matrice Z est la matrice de Lax de ce système;*
- *le crochet de Poisson écrit en terme des coordonnées locales permet de prouver une conjecture de [Arutyunov-Frolov, '98].*

Espace de Ruijsenaars-Schneider avec spin (3)

On dénote $t_{\alpha\beta}^l = V_\alpha Z^l W_\beta$, $Z = Y + X^{-1}$



$$\{\text{tr } Z^k, \text{tr } Z^l\}_P = 0 = \{\text{tr } Z^k, t_{\alpha\beta}^l\}_P$$

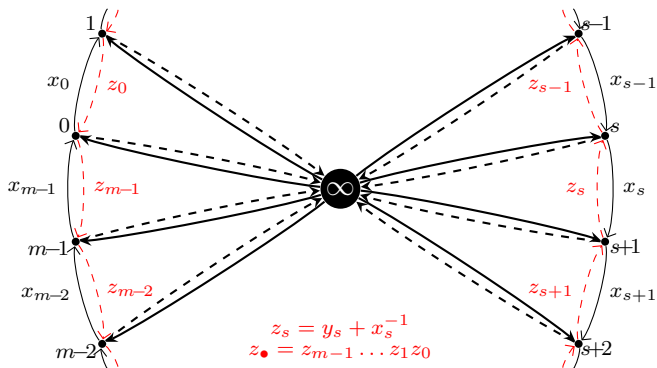
$$\{t_{\alpha\beta}^k, t_{\gamma\epsilon}^l\}_P = \text{compliqué !}$$

Proposition ([Chalykh-F., '20])

L'algèbre commutative générée par les éléments $(\text{tr } Z^k, t_{\alpha\beta}^k)$, $1 \leq \alpha, \beta \leq d$, est une algèbre de Poisson de dimension $2nd - n$, dont le centre a dimension n et contient les $(\text{tr } Z^k)$.

On a intégrabilité dégénérée/non-commutative des $\text{tr } Z^k$.

Espaces de RS et carquois cycliques



Proposition

Pour le vecteur dimension $(1, n, \dots, n)$ et des paramètres (q_s) génériques, on a l'intégrabilité (dégénérée/de Liouville) des $\text{tr } Z_{\bullet}^k$, $k = 1, \dots, n$.

voir [Chalykh-F., '17; F., '19] et [F., PhD thesis] ([ETHESES.WHITEROSE.AC.UK/24498/](https://theses.whiterose.ac.uk/24498/)) pour le cas général

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Systèmes intégrables à partir de carquois
- 3 **Structures de Poisson sur les carquois**
- 4 Vers les carquois colorés ?

Géométrie de Poisson non-commutative (1)

Algèbre A \dashrightarrow Algèbre comm. $\mathbb{C}[\text{Rep}(A, n)]$
 sur \mathbb{C} espace $\rightsquigarrow \text{Rep}(A, n)$ (ci-dessous)

$A^\lambda := A/(\mu - \lambda)$ \dashrightarrow Algèbre comm. $\mathbb{C}[\text{Rep}(A^\lambda, n)]$
 $\mu \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ espace $\rightsquigarrow \{(\mu_{ij}) = \lambda \text{Id}_n\}$

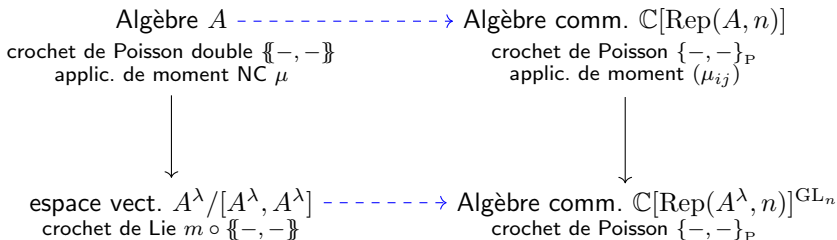
espace vect. $A^\lambda/[A^\lambda, A^\lambda]$ \dashrightarrow Algèbre comm. $\mathbb{C}[\text{Rep}(A^\lambda, n)]^{\text{GL}_n}$
 espace $\rightsquigarrow \text{Rep}(A^\lambda, n) // \text{GL}_n$

$\mathbb{C}[\text{Rep}(A, n)]$ générée par symboles $a_{ij}, \forall a \in A, 1 \leq i, j \leq n$.

Règles : $1_{ij} = \delta_{ij}, (a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (ab)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

$\mathbb{C}[\text{Rep}(A, n)]^{\text{GL}_n}$ générée par $\text{tr}(a), a \in A$

Géométrie de Poisson non-commutative (2)



Un **crochet double** est une application \mathbb{C} -bilinéaire $\{\{-, -\} : A \times A \rightarrow A^{\otimes 2}$ t.q.

- 1 $\{\{a, b\}\} = -\tau_{(12)} \{\{b, a\}\}$ (antisymétrie)
- 2 $\{\{a, bc\}\} = (b \otimes 1) \{\{a, c\}\} + \{\{a, b\}\} (1 \otimes c)$ (dérivation extérieure)
- 3 $\{\{ad, b\}\} = (1 \otimes a) \{\{d, b\}\} + \{\{a, b\}\} (d \otimes 1)$ (dérivation intérieure)

Le crochet double est **Poisson** si "Jacobi double" [Van den Bergh, '08]

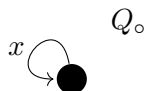
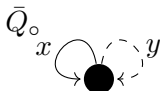
Crochet de Poisson induit : $\{a_{ij}, b_{kl}\}_P = \{\{a, b\}\}'_{kj} \{\{a, b\}\}''_{il}$ [Van den Bergh, '08]

Quel rapport avec le reste de l'exposé ?

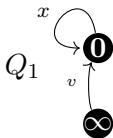
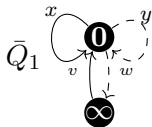
[Van den Bergh, '08] : crochet de Poisson double sur $A = \mathbb{C}\bar{Q}$, \forall carquois Q

Exemple

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{C}\langle x, y \rangle \\ &= \mathbb{C}\bar{Q}_\circ \end{aligned}$$



Les données $\{x, x\} = 0 = \{y, y\}$, $\{x, y\} = 1 \otimes 1$, $\mu_A = xy - yx$ sont définies sur $\mathbb{C}\bar{Q}_\circ$ (à partir de Q_\circ) et encodent le crochet de Poisson des variétés carquois associées.



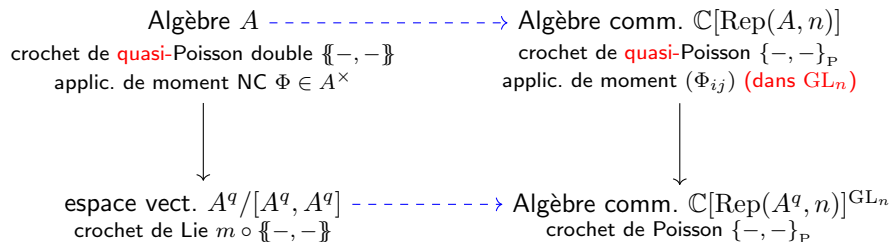
Exemple initial...

Attachons \mathbb{C}^n à 0, \mathbb{C} à ∞

\Rightarrow espace de Calogero-Moser [Wilson, '98]

$(\text{tr}(Y^k) := \text{tr}(y_{ij})^k)_{k=1}^n$ commutent

Géométrie de quasi-Poisson non-commutative



$$A^q = A/(\Phi - q) \text{ pour } q \in \mathbb{C}^\times$$

[Van den Bergh, '08] : crochet de quasi-Poisson double sur $A = \mathbb{C}\bar{Q}_{(1+aa^*)_{a \in \bar{Q}}}$

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Systèmes intégrables à partir de carquois
- 3 Structures de Poisson sur les carquois
- 4 **Vers les carquois colorés ?**

Carquois colorés (1)

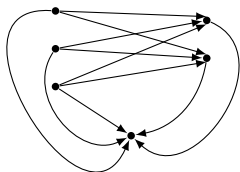
Les carquois colorés sont introduits par Boalch [Boalch,'15]

Motivation : variétés de caractères sauvages \rightsquigarrow “graphe supernova”

Définition

Un carquois Υ est **coloré** s'il existe une fonction couleur $c : \Upsilon \rightarrow C$ telle que

- $\Upsilon_c := c^{-1}(c)$ est un graphe k -parti complet
- l'orientation des flèches de Υ_c “respecte” les parties



Exemple 1

Graphe complet (3, 2, 1)
(monochromatique)

Exemple 2 : carquois arbitraire Q , sans boucle

prendre la couleur $c = id_Q$ (\rightsquigarrow $\#$ couleurs = $\#$ flèches)

Carquois colorés (2)

Soit Υ un carquois coloré.

L'*algèbre de Boalch* $\mathcal{B}(\Upsilon)$ est une algèbre obtenue par localisation de $\mathbb{C}\bar{\Upsilon}$

Remarque: $\exists \gamma_s : s \rightarrow s$ pour chaque sommet s

Si les flèches de Υ ont des couleurs distinctes 2-à-2, $\mathcal{B}(\Upsilon) = \mathbb{C}\bar{\Upsilon}_{(1+aa^*)_{a \in \bar{\Upsilon}}}$

Définition ([Boalch,'15])

Fixons un ordre sur les couleurs à chaque sommet $s \in I$.

L'*algèbre de fission* (avec param. $q \in (\mathbb{C}^\times)^I$) est $\mathcal{F}^q(\Upsilon) := \mathcal{B}(\Upsilon)/R_q$,

où R_q est l'idéal généré par les $|I|$ éléments

$$\gamma_s - q_s e_s \in e_s \mathcal{B}(\Upsilon) e_s, \quad s \in I.$$

Conjecture (1)

Théorème ([Boalch,'15])

Formons la variété des représentations $\text{Rep}(\mathcal{F}^q(\Upsilon), (n_s))$, où chaque e_s est représenté par la matrice identité sur \mathbb{C}^{n_s} , $s \in I$.

La partie lisse $\mathcal{M}^{st}(\Upsilon, q, (n_s)) \subset \text{Rep}(\mathcal{F}^q(\Upsilon), (n_s)) // \prod_s \text{GL}_{n_s}(\mathbb{C})$ est une variété symplectique obtenue par réduction quasi-Hamiltonienne.

↪ variété carquois multiplicative généralisée

Conjecture ([F.-Fernández,'21 / 2103.10117])

L'algèbre de Boalch $\mathcal{B}(\Upsilon)$ est équipée d'un crochet de quasi-Poisson double tel que l'élément $\sum_{s \in I} \gamma_s$ est son application de moment (non-comm.).

↪ La variété $\text{Rep}(\mathcal{F}^q(\Upsilon), (n_s)) // \prod_s \text{GL}_{n_s}(\mathbb{C})$ admet une structure de Poisson obtenue par réduction quasi-Hamiltonienne à partir de $\text{Rep}(\mathcal{B}(\Upsilon), (n_s))$.

Conjecture (2)

Conjecture ([F.-Fernández, '21])

L'algèbre de Boalch $\mathcal{B}(\Upsilon)$ est équipée d'un crochet de quasi-Poisson double tel que l'élément $\sum_{s \in I} \gamma_s$ est son application de moment (non-comm.).

- Il suffit de prouver le cas d'un carquois monochromatique : $c : \Upsilon \rightarrow \{*\}$
- Vrai pour $1 \rightarrow 2$ (conséquence de [Van den Bergh, '08])
- Vrai pour Δ [F.-Fernández, '21]

Les carquois suivant sont *monochromatiques* et cycliques :

Peuvent-ils être utilisés pour trouver de nouveaux systèmes RS ?

Merci pour votre attention !

Maxime Fairon

Maxime.Fairon@glasgow.ac.uk

<https://www.maths.gla.ac.uk/~mfairon/>